

Rastavljanje cijelih algebarskih izraza na faktore (I)

I) Broj koji je djeljiv samim sobom i sa 1 zove se **prost broj**. Broj koji ima još djelilaca naziva se **složen broj**. Rastaviti složen broj na faktore (činioce) ,znači predstaviti ga kao proizvod (produkt) prostih brojeva. Tako je naprimjer: $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$

II) Rastavljanje cijelih algebarskih izraza na faktore od posebnog je značaja. Mnogi zadaci iz algebre zahtijevaju da se cio algebarski izraz rastavi na faktore. Faktor algebarskog izraza koji se ne može napisati u obliku proizvoda jednostavnijih faktora naziva se **prosti faktor ili primfaktor**.

Definicija: Rastaviti cijeli algebarski izraz na faktore znači napisati ga u obliku proizvoda cijelog broja i cijelih algebarskih izraza koji se ne mogu dalje rastaviti na faktore.

Pri rastavljanju cijelih algebarskih izraza na faktore često ćemo se koristiti **zakonom distribucije množenja prema sabiranju, i to u obrnutom smjeru**, tj. izraze oblika $ac+bc$ ćemo napisati u obliku $(a+b)c$. Ovo ćemo nazivati izlučivanjem ili izvlačenjem zajedničkog faktora. Također ćemo primjenjivati i zakone asocijacije i komutacije za sabiranje i množenje.

Pri rastavljanju cijelih algebarskih izraza na faktore koristimo se i **osnovnim algebarskim identitetima**, koje sada navodimo:

Zapamti

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad (\text{kvadrat zbira})$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \quad (\text{kvadrat razlike})$$

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 \quad (\text{kub razlike})$$

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \quad (\text{kub zbira})$$

$$A^2 - B^2 = (A - B) \cdot (A + B) \quad (\text{razlika kvadrata})$$

$$A^3 - B^3 = (A - B) \cdot (A^2 + AB + B^2) \quad (\text{razlika kubova})$$

$$A^3 + B^3 = (A + B) \cdot (A^2 - AB + B^2) \quad (\text{zbir kubova})$$

, gdje su A i B bilo koji monomi ili realni brojevi.

Za svaki **neparan** $n \in N$, vrijedi:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (1)$$

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (2)$$

Riješeni zadaci

1) Rastaviti na faktore sledeće izraze (izvlačenjem zajedničkog faktora ispred zagrade):

a) $5a + 5b = 5 \cdot (a + b)$

b) $2a + 4b = 2 \cdot (a + 2b)$

c) $ab + ac = a \cdot (b + c)$

d) $x^2 + x = x \cdot x + x \cdot 1 = x \cdot (x + 1)$

e) $14ab^3 - 7b^4 = 7 \cdot 2 \cdot ab^3 - 7b^3 \cdot b = 7b^3 \cdot (2a - b)$

f) $3ax + 3bx = 3x \cdot (a + b)$

g) $15a^2 - 5ab = 5a \cdot 3a - 5ab = 5a \cdot (3a - b)$

h) $8x^2 - 4x^2y = 2 \cdot 4x^2 - 4x^2y = 4x^2 \cdot (2 - y)$

2) Rastaviti date izraze na faktore (izvlačenjem zajedničkog faktora ispred zagrade):

a) $a^{b+1} - a = a^b \cdot a - a \cdot 1 = a \cdot (a^b - 1)$

b) $a^x + a^{x+1} = a^x + a^x \cdot a = a^x \cdot (1 + a)$

c) $4x^{a+2} + 12x^a = 4x^a \cdot x^2 + 3 \cdot 4 \cdot x^a = 4x^a \cdot (x^2 + 3)$

d) $12x^{2n+3} + 16x^{n+1} = 3 \cdot 4 \cdot x^{n+1} \cdot x^{n+2} + 4 \cdot 4 \cdot x^{n+1} = 4x^{n+1} \cdot (3x^{n+2} + 4)$

3) Rastaviti date izraze na faktore:

a) $3x^2y + 6xy^2 - 3xy = 3xy \cdot x + 3xy \cdot 2y - 3xy \cdot 1 = 3xy(x + 2y - 1)$

b) $5ab + 15a^2 + 5ac = 5ab + 5a \cdot 3a + 5ac = 5a(b + 3a + c)$

c) $6a^2b^2 + 9ab^3 - 3ab^2 = 3ab^2 \cdot 2a + 3ab^2 \cdot 3b - 3ab^2 = 3ab^2(2a + 3b - 1)$

d) $4x^2y^2 - 8x^3y^2 + 4x^2y^3 = 4x^2y^2 - 4x^2y^2 \cdot 2x + 4x^2y^2 \cdot y = 4x^2y^2 \cdot (1 - 2x + y)$

4) Rastaviti date izraze na faktore:

a) $x \cdot (a - 2) + y \cdot (a - 2) = (a - 2) \cdot (x + y)$

b) $x(a - b) + y(a - b) - z(a - b) = (a - b)(x + y - z)$

$$c) 2a(x+1) - b(x+1) = (x+1)(2a-b)$$

$$d) a(x^2 + y^2) - b(x^2 + y^2) + 2c(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)(a - b + 2c)$$

$$e) (a+b)(x+y) + (2x+y)(a+b) = (a+b)(x+y+2x+y) = (a+b)(3x+2y)$$

$$f) (4a-1)(x+2y) - (a-3)(x+2y) = (x+2y)[(4a-1) - (a-3)] = (x+2y)[4a-1-a+3] = \\ = (x+2y)(3a+2)$$

$$g) b(3a-4) - 3a + 4 = b(3a-4) - 1 \cdot (3a-4) = (3a-4)(b-1)$$

$$h) 2x(y-3) - y + 3 = 2x(y-3) - 1 \cdot (y-3) = (y-3)(2x-1)$$

$$i) a(x+y) + x + y = a(x+y) + 1 \cdot (x+y) = (x+y)(a+1)$$

$$j) x(a-b) + y(b-a) = x(a-b) + y(-(a-b)) = x(a-b) - y(a-b) = (a-b)(x-y)$$

$$k) 2x(a-b) - a + b = 2x(a-b) - 1 \cdot (a-b) = (a-b)(2x-1)$$

$$l) 2a(a-2v) + 2v - a = 2a(a-2v) - 1 \cdot (a-2v) = (a-2v) \cdot (2a-1)$$

$$m) a(x-2y) - b(2y-x) = a(x-2y) - b(-(x-2y)) = a(x-2y) + b(x-2y) = (x-2y)(a+b)$$

5) Rastavi date izraze na faktore (metodom grupisanja članova):

Napomena: Nakon grupisanja članova izlučiti (izvući) zajednički faktor.

$$a) ax + ay + bx + by = (ax + ay) + (bx + by) = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$$

$$b) 4a^2 + 4a - ab - b = (4a^2 - ab) + (4a - b) = a \cdot (4a - b) + 1 \cdot (4a - b) = (4a - b)(a + 1)$$

$$c) 6ax + 8ay - 9bx - 12by = (6ax - 9bx) + (8ay - 12by) = 3x \cdot (2a - 3b) + 4y \cdot (2a - 3b) = \\ = (2a - 3b)(3x + 4y)$$

$$d) 1 + 2b - 3a - 6ab = (1 - 3a) + (2b - 6ab) = (1 - 3a) + 2b \cdot (1 - 3a) = (1 - 3a) \cdot (1 + 2b)$$

$$e) 4b - 5a - 20ab + 1 = (4b + 1) + (-20ab - 5a) = (4b + 1) - 5a \cdot (4b + 1) = (4b + 1) \cdot (1 - 5a)$$

$$f) 6x - 15xy + 2y - 5y^2 = (6x + 2y) + (-15xy - 5y^2) = 2 \cdot (3x + y) - 5y \cdot (3x + y) = \\ = (3x + y) \cdot (2 - 5y)$$

$$g) \text{ Za samostalan rad: } 12ab - 5 - 3b + 20a = \quad ; \quad \text{Rješenje: } (4a - 1)(3b + 5)$$

h) Za samostalan rad: $21yz - 15ay - 20ab + 28bz =$; Rješenje: $(3y + 4b)(7z - 5a)$

6) Rastaviti date izraze na faktore:

$$\text{a) } 15a^2b + 5aby - 3ax^2 - x^2y = (15a^2b + 5aby) + (-3ax^2 - x^2y) = 5ab(3a + y) - x^2(3a + y) = (3a + y)(5ab - x^2)$$

$$\text{b) } a^3x - 5a^2x - 3ax^2 + 15x^2 = (a^3x - 5a^2x) + (-3ax^2 + 15x^2) = a^2x(a - 5) - 3x^2(a - 5) = (a - 5)(a^2x - 3x^2) = x(a^2 - 3x)(a - 5)$$

$$\text{c) } 10xy^4 + 6xy^2 - 15xy^3 - 9xy = (10xy^4 - 15xy^3) + (6xy^2 - 9xy) = 5xy^3 \cdot (2y - 3) + 3xy \cdot (2y - 3) = (2y - 3) \cdot (5xy^3 + 3xy) = (2y - 3) \cdot xy(5y^2 + 3) = xy(2y - 3)(5y^2 + 3)$$

d) Za samostalan rad: $8x^2y + 2bx - 8xy^2 - 2by =$; Rješenje: $2(4xy + b)(x - y)$

7) Rastaviti date izraze na faktore (koristiti „razliku kvadrata“ $A^2 - B^2 = (A - B) \cdot (A + B)$):

$$\text{a) } a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

$$\text{b) } 1 - 9a^2 = 1^2 - (3a)^2 = (1 - 3a)(1 + 3a)$$

$$\text{c) } 4x^2 - 49y^2 = (2x)^2 - (7y)^2 = (2x - 7y)(2x + 7y)$$

$$\text{d) } 9a^2 - 25b^2 = (3a)^2 - (5b)^2 = (3a - 5b)(3a + 5b)$$

$$\text{e) } 1 - \frac{4x^2}{9y^2} = 1^2 - \left(\frac{2x}{3y}\right)^2 = \left(1 - \frac{2x}{3y}\right) \left(1 + \frac{2x}{3y}\right)$$

$$\text{f) } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2 = \left(\frac{x}{4} - \frac{y}{5}\right) \left(\frac{x}{4} + \frac{y}{5}\right) = \frac{1}{20} (5x - 4y)(5x + 4y)$$

$$\text{g) Za samostalan rad: } \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{9} =$$

$$\text{h) Za samostalan rad: } \frac{a^2}{9} - 25 =$$

8) Rastaviti izraze na faktore:

$$\text{a) } 7a^2 - 7b^2 = 7(a^2 - b^2) = 7(a - b)(a + b)$$

$$\text{b) } 2x^2 - 8y^2 = 2 \cdot (x^2 - 4y^2) = 2(x^2 - (2y)^2) = 2(x - 2y)(x + 2y)$$

$$c) 12x^2 - 27y^2 = 3 \cdot (4x^2 - 9y^2) = 3 \cdot ((2x)^2 - (3y)^2) = 3(2x - 3y)(2x + 3y)$$

$$d) 125x^2 - 45y^2 = 5 \cdot (25x^2 - 9y^2) = 5((5x)^2 - (3y)^2) = 5(5x - 3y)(5x + 3y)$$

$$e) 20x^3 - 5xy^2z^4 = 5x \cdot 4x^2 - 5xy^2z^4 = 5x(4x^2 - y^2z^4) = 5x((2x)^2 - (yz^2)^2) = 5x(2x - yz^2)(2x + yz^2)$$

$$f) x^3y - xy^3 = xy(x^2 - y^2) = xy(x - y)(x + y)$$

$$g) a^2bx^2 - a^2b = a^2b(x^2 - 1) = a^2b(x - 1)(x + 1)$$

$$h) 6a^3 - 24ab^2 = 6a(a^2 - 4b^2) = 6a(a^2 - (2b)^2) = 6a(a - 2b)(a + 2b)$$

9) Koristeći „razliku kvadrata“ rastaviti izraze na faktore:

$$a) (x + y)^2 - z^2 = (x + y - z)(x + y + z)$$

$$b) (a - 2b)^2 - c^2 = (a - 2b - c)(a - 2b + c)$$

$$c) (2a + b)^2 - 4b^2 = (2a + b)^2 - (2b)^2 = (2a + b - 2b)(2a + b + 2b) = (2a - b)(2a + 3b)$$

$$d) 25 - (a - 3b)^2 = 5^2 - (a - 3b)^2 = (5 - (a - 3b))(5 + a - 3b) = (5 - a + 3b)(5 + a - 3b)$$

$$e) \text{ Za samostalan rad: } a^2 - (2a + 3)^2 = \quad ; \text{ Rješenje: } -3(a + 1)(a + 3)$$

$$f) \text{ Za samostalan rad: } 36a^2 - (5a + 3b)^2 = \quad ; \text{ Rješenje: } (a - 3b)(11a + 3b)$$

$$g) \text{ Za samostalan rad: } (x + 3y)^2 - 16x^2 = \quad ; \text{ Rješenje: } 3(5x + 3y)(y - x)$$

$$h) \text{ Za samostalan rad: } (2a + 3b - 1)^2 - 4 = \quad ; \text{ Rješenje: } (2a + 3b - 3)(2a + 3b + 1)$$

$$i) (a + b)^2 - (a - b)^2 = [(a + b) - (a - b)] \cdot [(a + b) + (a - b)] = [a + b - a + b] \cdot [a + b + a - b] = 2b \cdot 2a = 4ab$$

$$j) (a + 3b)^2 - (a - 2b)^2 = [(a + 3b) - (a - 2b)] \cdot [(a + 3b) + (a - 2b)] = [a + 3b - a + 2b] \cdot [a + 3b + a - 2b] = 5b(2a + b)$$

$$k) \text{ Za samostalan rad: } -(x + 5)^2 + (2x - y + 3)^2 = \quad ; \text{ Rješenje: } (3x - y + 8)(x - y - 2)$$

$$l) \text{ Za samostalan rad: } (x + 2y - 1)^2 - (x + 3y + 2)^2 = \quad ; \text{ Rješenje: } -(2x + 5y + 1)(y + 3)$$

10) Rastaviti na faktore:

$$\begin{aligned} \text{a) } 4x^2 - 36(x-5y)^2 &= 2^2 x^2 - 6^2 (x-5y)^2 = (2x)^2 - [6(x-5y)]^2 = \\ &= [2x - 6(x-5y)] \cdot [2x + 6(x-5y)] = [2x - 6x + 30y] \cdot [2x + 6x - 30y] = [-4x + 30y] \cdot [8x - 30y] \\ &= -2(2x - 15y) \cdot 2(4x - 15y) = -4(2x - 15y)(4x - 15y) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 16(a+2b)^2 - (a-5b)^2 &= [4(a+2b)]^2 - (a-5b)^2 = [4(a+2b) - (a-5b)] \cdot [4(a+2b) + (a-5b)] = \\ &= [4a + 8b - a + 5b] \cdot [4a + 8b + a - 5b] = (3a + 13b) \cdot (5a + 3b) \end{aligned}$$

c) Za samostalan rad: $(x-y)^2 - 4(x+3y)^2 =$; Rješenje: $-(3x+5y)(x+7y)$

d) Za samostalan rad: $9(x+y)^2 - 25(x-2y)^2 =$; Rješenje: $(8x-7y)(13y-2x)$

e) $x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x-y)(x+y)(x^2 + y^2)$

f) $a^8 - b^8 = (a^4)^2 - (b^4)^2 = (a^4 - b^4)(a^4 + b^4) = (\text{prema...predhodnom...zadatku...pod...e}) =$
 $= (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$

g) $16a^4 - 1 = 2^4 a^4 - 1^4 = (2a)^4 - 1^4 = [(2a)^2]^2 - (1^2)^2 = [(2a)^2 - 1^2] \cdot [(2a)^2 + 1^2] =$
 $= (2a-1)(2a+1)(4a^2 + 1)$

h) $81x^4 - 16y^8 z^4 = (3x)^4 - (2y^2 z)^4 = (3x - 2y^2 z)(3x + 2y^2 z)(9x^2 + 4y^4 z^2)$

i) Za samostalan rad: $1 - 625x^4 y^8 =$

11) Rastaviti na faktore:

a) $x^2 y^2 + 9 = (xy)^2 + 3^2$

Vidimo da je dati izraz zbir kvadrata i njega ne možemo rastaviti u skupu realnih brojeva **R**.

b) $x^6 y^2 z^8 - 16x^4 z^8 = (x^3 y z^4)^2 - (4x^2 z^4)^2 = (x^3 y z^4 - 4x^2 z^4)(x^3 y z^4 + 4x^2 z^4) =$
 $= x^2 z^4 (xy - 4) \cdot x^2 z^4 (xy + 4) = x^4 z^8 (xy - 4)(xy + 4)$

c) $(a-b) - (a-b)^3 = (a-b) \cdot [1 - (a-b)^2] = (a-b)[1^2 - (a-b)^2] =$
 $= (a-b) \cdot [1 - (a-b)] \cdot [1 + (a-b)] = (a-b)(1-a+b)(1+a-b)$

d) $a^2 - a + b - b^2 = (a^2 - b^2) + (-a + b) = (a-b)(a+b) - 1 \cdot (a-b) = (a-b)(a+b-1)$

e) $a^4 - 2a^3 b + 2ab^3 - b^4 = (a^4 - b^4) + (-2a^3 b + 2ab^3) = ((a^2)^2 - (b^2)^2) - 2ab(a^2 - b^2) =$
 $= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) - 2ab(a^2 - b^2) = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - 2ab) = (a-b)(a+b)(a^2 - 2ab + b^2) =$

$$= (\text{primijentiti „kvadrat razlike i razliku kvadrata“}) = (a-b)(a+b)(a-b)^2 = (a-b)^3 \cdot (a+b)$$

$$\text{f) } x^3 - 5x^2 - 9x + 45 = x^2(x-5) - 9(x-5) = (x-5)(x^2-9) = (x-5)(x-3)(x+3)$$

$$\text{g) } a^2(a^2-9) - a^2 + 9 = a^2(a^2-9) - 1 \cdot (a^2-9) = (a^2-9)(a^2-1) = (a^2-3^2)(a^2-1^2) = \\ = (a-3)(a+3)(a-1)(a+1)$$

$$\text{h) } a^2b^2 + 1 - a^2 - b^2 = (a^2b^2 - a^2) + (1 - b^2) = a^2(b^2-1) - 1 \cdot (b^2-1) = (b^2-1)(a^2-1) = \\ = (b-1)(b+1)(a-1)(a+1)$$